

Επαναληπτικά θέματα & απαντήσεις σε Διαφορικό λογισμός & Πιθανότητες

Τί πρέπει να γνωρίζω

(I) Για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις στις πιθανότητες, στηρίζομαστε στους εξής ισχυρισμούς:

- Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Αν

$$A \subseteq B$$

τότε

$$P(A) \leq P(B)$$

- Ισχύει

$$(A \cap B) \subseteq A$$

και ισχύει επίσης

$$(A \cap B) \subseteq B$$

επομένως

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

και αντιστοίχως

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

- Ισχύει

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$A \subseteq (A \cup B)$$

και ισχύει επίσης

$$B \subseteq (A \cup B)$$

επομένως

$$P(A) \leq P(A \cup B)$$

και αντιστοίχως

$$P(B) \leq P(A \cup B)$$

(II) Ένας άλλος τρόπος για να αποδεικνύουμε ανισοτικές σχέσεις στις πιθανότητες είναι:

με ισοδύναμες πράξεις να καταλήγουμε σε μια ανισότητα η οποία είναι προφανής

(III) Για να αποδείξουμε ότι δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δεν είναι ασυμβίβαστα, δεχόμαστε ότι είναι ασυμβίβαστα και με τη βοήθεια της ισότητας

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

καταλήγουμε σε άτοπο

Άσκηση 1η

Για δυο οποιαδήποτε ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι

$$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

Απόδειξη

Θέλω να δείξω ότι **(1)**:

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

Γνωρίζω ότι (2):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$$

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \rightarrow$$

$$2P(A \cap B) \leq P(A \cup B) + P(A \cap B) \rightarrow$$

$$P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$$

που ισχύει, διότι

$$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$$

Στη συνέχεια θέλω να δείξω ότι

$$P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται λόγω της (2)

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \leq 1$$

που ισχύει

Επομένως

$$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

Άσκηση 2η

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης και X, Y δύο ενδεχόμενα του τέτοια ώστε

$$X \subseteq Y$$

Θεωρούμε

$$P(X), P(Y)$$

τις πιθανότητες των

$$X, Y \text{ αντίστοιχα}$$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί

$$P(X), P(Y)$$

είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f \text{ με } f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2000$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ τότε}$$

1) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

2) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες

$$P(X), P(Y), P(X \cap Y), P(X \cup Y), P(X' \cap Y)$$

όπου

$$X'$$

το αντίθετο ενδεχόμενο του

$$X$$

Λύση

<http://www.mathschoolonline.org/>

1) Υπολογίζω τη παράγωγο συνάρτηση της f

$$f'(x) = (4x^3 - 5x^2 + 2x + 2000)' = 12x^2 - 10x + 2 = 2(6x^2 - 5x + 1)$$

Λύνω την εξίσωση

$$f'(x) = 0$$

Ισοδύναμα

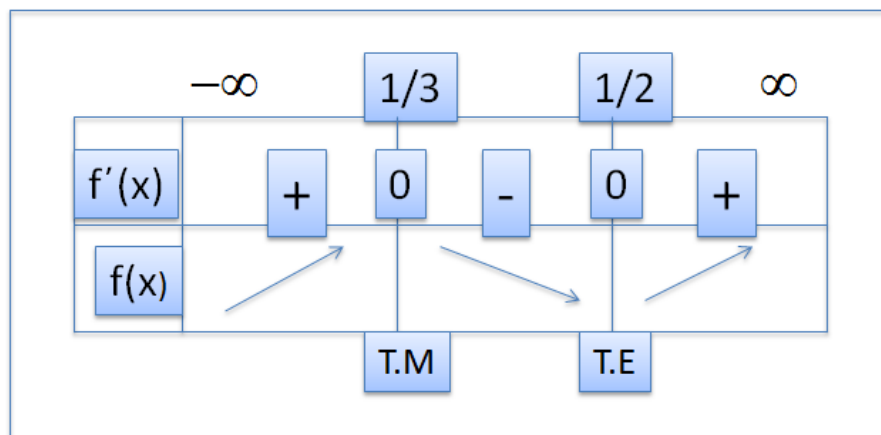
$$2(6x^2 - 5x + 1) = 0 \rightarrow$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0, \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Σχηματίζω το πίνακα μονοτονίας της f



2) Από την υπόθεση έχω

$$X \subseteq Y$$

Επομένως

$$P(X) \leq P(Y)$$

Άρα

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$P(X) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y) = \frac{1}{2}$$

Γνωρίζω

$$X \subseteq Y$$

οπότε

$$X \cap Y = X$$

και

$$X \cup Y = Y$$

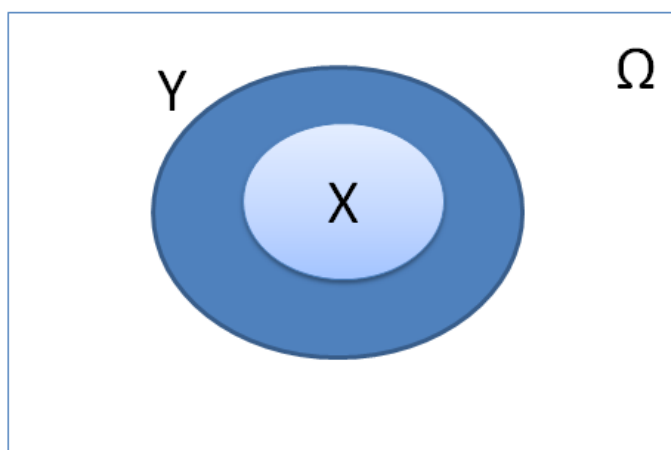
Άρα

$$P(X \cap Y) = P(X) = \frac{1}{3}$$

και

$$P(X \cup Y) = P(Y) = \frac{1}{2}$$

Από το διάγραμμα Venn έχω



<http://www.mathschoolonline.org/>

$$P(X' \cap Y) = P(Y - X) = P(Y) - P(X \cap Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Άσκηση 3η

Αν για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A)=0,8 \text{ και } P(B)=0,4$$

να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

Απόδειξη

Εστω ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα

τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,8 + 0,4 = 1,2 \rightarrow$$

$$P(A \cup B) = 1,2$$

Άτοπο, διότι γνωρίζω ότι

$$P(A \cup B) \leq 1$$

Επομένως τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

Θέμα 1ο

Αν

$$A \subseteq B$$

Να δείξετε ότι

$$P(A) \leq P(B)$$

Ισχύει το αντίστροφο;

<http://www.mathschoolonline.org/>

Απόδειξη

Από την υπόθεση έχω

$$A \subseteq B$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$N(A) \leq N(B)$$

Επομένως

$$N(A) \leq N(B) \rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Αντιστρόφως

θα εξετάσω όταν

$$P(A) \leq P(B)$$

αν ισχύει

$$A \subseteq B$$

Μέθοδος απόδειξης με **αντιπαράδειγμα**

Εστω

$$\Omega = [1, 2, 3, 4]$$

και τα ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα A και B με

$$A = [1, 2]$$

και

$$B = [1, 3, 4]$$

Έχω

$$P(A) = \frac{2}{4}$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

Παρατηρώ δηλαδή ότι

$$P(A) \leq P(B)$$

Ενώ δεν ισχύει

$$A \subseteq B$$

Δηλαδή το A δεν είναι υποσύνολο του B

Θέμα 2ο

Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ στον οποίο ορίζεται η πιθανότητα κάθε στοιχείου ω από τον τύπο

$$P(\omega) = \lambda \omega, \lambda > 0 \text{ σταθερός αριθμός}$$

α) Να βρείτε τον λ

β) Αν A και B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω με

$$P(A) = \frac{x^2 + 1}{4}$$

$$P(B) = \frac{2 - x}{2}$$

να βρείτε τον x

Απόδειξη

α) Γνωρίζω ότι

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_{15}) = 1$$

$$\lambda \cdot 1 + \lambda \cdot 2 + \lambda \cdot 3 + \dots + \lambda \cdot 15 = 1 \rightarrow \lambda + 2\lambda + 3\lambda + \dots + 15\lambda = 1$$

Παρατηρώ ότι το **(1)**

$$\lambda \cdot 1 + \lambda \cdot 2 + \lambda \cdot 3 + \dots + \lambda \cdot 15 = 1 \rightarrow \lambda + 2\lambda + 3\lambda + \dots + 15\lambda$$

είναι το άθροισμα 15 όρων μιας αριθμητικής προόδου με βήμα το λ

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

Άρα το άθροισμα αυτό δίνεται από το τύπο

$$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$$

$$\text{όπου } n=15, \alpha_1=\lambda, \alpha_{15}=15\lambda$$

Επομένως

$$S_{15} = \frac{15}{2}(\lambda + 15\lambda) \rightarrow$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}16\lambda \rightarrow$$

$$S_{15} = 120\lambda \rightarrow$$

$$S_{15} = 120\lambda$$

Άρα η σχέση **(1)** γίνεται

$$120\lambda = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{120}$$

β) Τα A και B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω

επομένως

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

Όμως

$$P(A \cup B) \leq 1$$

Επομένως

$$P(A) + P(B) \leq 1$$

Άρα

$$\frac{x^2+1}{4} + \frac{2-x}{2} \leq 1 \rightarrow$$

$$4 \frac{x^2+1}{4} + 4 \frac{2-x}{2} \leq 4 \rightarrow$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$x^2 + 1 + 2(2 - x) \leq 4 \rightarrow$$

$$x^2 + 1 + 4 - 2x - 4 \leq 0 \rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x - 1)^2 \leq 0$$

Όμως

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

Επομένως η

$$(x - 1)^2 \leq 0$$

αληθεύει μόνο όταν

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,$$

διπλή ρίζα

Επαναληπτικά θέματα σε όλη την ύλη & απαντήσεις

Θέμα 1ο

Α.α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παράγωγίσιμη σε ένα σημείο

$$x_0$$

του πεδίου ορισμού της και τι εκφράζει η παράγωγος της f στο

$$x_0$$

στη γραφική της παράσταση;

Μονάδες 4

β) Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη και c είναι η πραγματική σταθερά να αποδείξετε ότι

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

Μονάδες 4

Απάντηση

α) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο

$$x_0$$

του πεδίου ορισμού της όταν το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

Η παράγωγος της f στο

$$x_0$$

στη γραφική της παράσταση εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$$A(x_0, f(x_0))$$

β) Έστω

$$g(x) = cf(x)$$

παραγωγίζω

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} =$$

$$c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$cf'(x)$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

B . α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σημειώνοντας το αντίστοιχο γράμμα Σ (ΣΩΣΤΟ) ή Λ (ΛΑΘΟΣ)

i) Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο

$$x_0 = 0$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ως προς το χρόνο είναι η επιτάχυνση του κινητού

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3$$

στο σημείο

$$A(-1, f(-1))$$

είναι

$$y = 6x + 4$$

Απάντηση

i), ii) Λ (είναι η ταχύτητα)

iii) Σ

Επεξήγηση του iii) ερωτήματος

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$$

$$f'(-1) = 6(-1)^2 = 6$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο

$$A(-1, f(-1))$$

είναι

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$y = f'(-1)x + \alpha \rightarrow y = 6x + \alpha$$

Εύρεση του α

$$f(-1) = 2(-1)^3 = -2$$

επομένως η

$$y = 6x + \alpha$$

γράφεται

$$-2 = 6(-1) + \alpha \rightarrow \alpha = -2 + 6 \rightarrow \alpha = 4$$

Άρα

$$y = 6x + 4$$

Μονάδες 9

B. β) Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης A

με τη παράγωγο

$$f'(1)$$

της στήλης B

Στήλη A

Στήλη B

1 $f(x) = x^3 e^{2x-2}$ **α** $f'(1) = 1$

2 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ **β** $f'(1) = 2$

3 $f(x) = 10\sqrt[5]{x}$ **γ** $f'(1) = 4$

4 $f(x) = \frac{16}{\pi} \eta \mu^2 \frac{\pi x}{4}$ **δ** $f'(1) = 5$

1δ (απόδειξη)

$$f'(x) = (x^3 e^{2x-2})' =$$

$$(x^3)' e^{2x-2} + x^3 (e^{2x-2})' =$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$3x^2e^{2x-2} + x^3e^{2x-2}(2x-2)' =$$

$$3x^2e^{2x-2} + x^32e^{2x-2} =$$

$$x^2e^{2x-2}(3+2x)$$

Οπότε

$$f'(1) = 5$$

2α (απόδειξη)

$$f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{1}{x^2+1}2x$$

Οπότε

$$f'(1) = 1$$

3β (απόδειξη)

$$f'(x) = (10\sqrt[5]{x})' = 10' \sqrt[5]{x} + 10(\sqrt[5]{x})' = 10\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = 10^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}-1} = 2x^{-\frac{4}{5}}$$

Οπότε

$$f'(1) = 2$$

4γ(απόδειξη)

$$f'(x) = \left(\frac{16}{\pi}\eta\mu^2\frac{\pi x}{4}\right)' =$$

$$\frac{16}{\pi}\left(\eta\mu^2\frac{\pi x}{4}\right)' =$$

$$\frac{16}{\pi}2\eta\mu\frac{\pi x}{4}\left(\eta\mu\frac{\pi x}{4}\right)' =$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$\frac{16}{\pi} 2\eta\mu\frac{\pi x}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4} \cdot \left(\frac{\pi x}{4}\right)' =$$

$$\frac{\pi 16}{4} 2\eta\mu\frac{\pi x}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4} =$$

$$8\eta\mu\frac{\pi x}{4} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}$$

Οπότε

$$f'(1) = 4$$

Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Η πιθανότητα ένας φοιτητής να γράψει καλά ένα μάθημα A είναι

$P(A) = 70\%$ και για να γράψει καλά και στο μάθημα A και σε ένα άλλο μάθημα B είναι

$$P(A \cap B) = 0,5$$

ανάλογα με το χρόνο διαβάσματος στο μάθημα

A. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε ο μαθητής να γράψει καλά στο μάθημα B ή να μη γράψει καλά στο μάθημα A

Μονάδες 10

B. Να αποδειχθεί ότι

$$a) 0,5 \leq P(A) \leq 0,8$$

Μονάδες 8

β) η μεγαλύτερη πιθανότητα για να μη γράψει καλά ο μαθητής ούτε στο μάθημα A ούτε στο μάθημα B είναι 30%

Μονάδες 7

Λύση

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

Η πιθανότητα ο μαθητής να γράψει καλά στο μάθημα B ή να μη γράψει καλά στο μάθημα A είναι

$$P(B \cup A')$$

Γνωρίζω ότι

$$P(B \cup A') = P(B) + P(A') - P(B \cap A') \quad (1)$$

Όμως

$$P(B \cap A') = P(B - A)$$

οπότε η (1) γίνεται

$$P(B \cup A') = P(B) + P(A') - P(B \cap A') =$$

$$P(B) + 1 - P(A) - P(B - A) \quad (2)$$

Όμως

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

άρα η (2) γίνεται

$$P(B \cup A') =$$

$$P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(B \cap A) =$$

$$1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - 0,7 + 0,5 = 0,8$$

B.α)

$$A \cap B \subseteq B$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

Άρα

$$P(A \cap B) \leq P(B) \rightarrow$$

$$0,5 \leq P(B) \quad (1)$$

Γνωρίζω ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$$

$$P(A \cup B) = 0,7 + P(B) - 0,5 \rightarrow$$

$$P(A \cup B) =$$

$$0,2 + P(B) \quad (2)$$

Όμως

$$P(A \cup B) \leq 1$$

Επομένως η (2) γίνεται

$$0,2 + P(B) \leq 1$$

$$P(B) \leq 0,8 \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) έχω

$$0,5 \leq P(B) \leq 0,8$$

β) Η πιθανότητα για να μη γράψει καλά ο μαθητής ούτε στο μάθημα Α ούτε στο μάθημα Β είναι

$$P(A' \cap B')$$

Όμως

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') \quad (1)$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) = \\ 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) &= \\ 1 - 0,7 - P(B) + 0,5 &= 0,8 - P(B) \quad (4) \end{aligned}$$

Εδειξα ότι

$$\begin{aligned} 0,5 &\leq P(B) \rightarrow \\ 0,5 - P(B) &\leq 0 \rightarrow \\ -P(B) &\leq -0,5 \rightarrow 0,8 - P(B) \leq -0,5 + 0,8 \rightarrow \\ 0,8 - P(B) &\leq 0,3 \quad (5) \end{aligned}$$

Επομένως η (4) γίνεται

$$P(A' \cap B') = 0,8 - P(B)$$

Η παραπάνω σχέση λόγω της (5) γίνεται

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 0,8 - P(B) \leq 0,3 \\ P(A' \cap B') &\leq 0,3 \rightarrow \\ \max P(A' \cap B') &= 0,3 \end{aligned}$$

Επομένως η μεγαλύτερη πιθανότητα για να μη γράψει καλά ο μαθητής
ούτε στο μάθημα Α ούτε στο μάθημα Β είναι 30%

Θέμα 3ο

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

Η θέση ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα την τυχαία χρονική στιγμή (ο χρόνος μετριέται σε second)

$$t \geq 0$$

δίνεται σε από τη συνάρτηση

$$s(t) = \frac{2t}{5} - \ln(2t+1)$$

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή

$$t_0$$

που το

$$s(t)$$

είναι ελάχιστο

Επίσης να εξετάσετε αν ισχύει

$$s(t_0) \leq 0$$

Μονάδες 15

β) Να εξετάσετε αν η ταχύτητα του κινητού συνεχώς αυξάνεται

Μονάδες 10

Λύση

α) Παραγωγίζω τη συνάρτηση

$$s(t) = \frac{2t}{5} - \ln(2t+1)$$

Επομένως έχω

$$s'(t) = \left(\frac{2t}{5} - \ln(2t+1) \right)' =$$

$$\left(\frac{2t}{5} \right)' - (\ln(2t+1))' =$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{2t+1}(2t+1)' = \frac{2}{5} - \frac{2}{2t+1} =$$

$$\frac{4t+2-10}{5(2t+1)} = \frac{4(t-2)}{5(2t+1)}$$

Σχηματίζω το πίνακα της μονοτονίας της S

t	0	2	$+\infty$
$S'(t)$	-	+	
$S(t)$			

Παρατηρώ από το πίνακα ότι τη χρονική στιγμή

$$t_0 = 2$$

το

$$s(t)$$

είναι ελάχιστο

Εξετάζω αν ισχύει

$$s(t_0) \leq 0$$

Έχω

$$s(2) = \frac{4}{5} - \ln 5$$

Έστω

$$s(2) \leq 0$$

$$\frac{4}{5} - \ln 5 < 0 \rightarrow 4 < 5 \ln 5 \rightarrow 4 < \ln 5^5 \rightarrow e^4 < e^{\ln 5^5} \rightarrow e^4 < 5^5$$

Ισχύει εφόσον

<http://www.mathschoolonline.org/>

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$e \approx 2,718$$

β) Η ταχύτητα του κινητού δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = s'(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{2t+1}$$

$$u'(t) = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{2t+1} \right)' =$$
$$-\frac{-2(2t+1)'}{(2t+1)^2} = \frac{4}{(2t+1)^2} > 0$$

$$u'(t) > 0$$

για κάθε t

Επομένως

η

$$u(t)$$

είναι γνησίως αύξουσα, επομένως η ταχύτητα του σώματος συνεχώς αυξάνεται

Θέμα 4ο

Σε μια εταιρεία εργάζονται 120 υπάλληλοι ειδικοποιημένοι και ανειδίκευτοι με μέσο εβδομαδιαίο μισθό 200 ευρώ. Οι ανειδίκευτοι έχουν μέσο εβδομαδιαίο μισθό 168 ευρώ και οι ειδικοποιημένοι 208 ευρώ

A Να βρείτε πόσοι είναι οι ανειδίκευτοι και πόσοι οι ειδικοποιημένοι υπάλληλοι τη παραπάνω εταιρείας

Μονάδες 12

B Αν οι εβδομαδιαίοι μισθοί των ανειδίκευτων είναι ίδιοι, καθώς επίσης και των ειδικοποιημένων να εξατάσετε αν οι μισθοί όλων των 120 υπαλλήλων αποτελούν ένα δείγμα ομοιογενές

<http://www.mathschoolonline.org/>

Μονάδες 13

Λύση

A Έστω x οι ανειδίκευτοι και y οι ειδικευμένοι υπάλληλοι

Έχω

$$x + y = 120 \quad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \nu_i}{x} = 168 \rightarrow \sum x_i \nu_i = 168x$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \nu_i}{y} = 208 \rightarrow \sum y_i \nu_i = 208y$$

Επομένως η μέση τιμή όλου του δείγματος των ειδικευμένων και των ανειδίκευτων είναι

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \nu_i + \sum y_i \nu_i}{120} = 200 \rightarrow \frac{168x + 208y}{120} = 200 \quad (2)$$

Από τις **(1)** και **(2)** έχω

$$x + y = 120$$

$$168x + 208y = 24000$$

Λύνω το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και βρίσκω

$$x = 24$$

και

$$y = 96$$

B Οι εβδομαδιαίοι μισθοί των ανειδίκευτων είναι ίδιοι και ίσοι με 168 ευρώ, καθώς επίσης και των ειδικευμένων είναι ίδιοι και ίσοι με 208 ευρώ

τότε

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} \rightarrow s^2 =$$

<http://www.mathschoolonline.org/>

$$\frac{(168-200)^2 24 + (208-200)^2 96}{120} \rightarrow$$

$$s^2 = 256 \rightarrow s = 16$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{16}{200} = 0,8$$

$$CV = 8\% < 10\%$$

Επομένως το δείγμα είναι *ομοιογενές*

Καλή μελέτη! <http://www.mathschoolonline.org/>